

A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos

Fátima Mendes

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Resumo: Este artigo apresenta e discute alguns aspetos sobre a aprendizagem da divisão com números naturais, focando-se nos procedimentos usados por alunos de uma turma do 3.º ano na resolução de tarefas de divisão. Os resultados apresentados fazem parte de uma investigação mais abrangente que teve como finalidade a compreensão do modo como os alunos aprofundam a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido do número. A investigação realizada seguiu uma metodologia de *design research*, na modalidade de experiência de ensino. A análise das produções escritas dos alunos e de episódios de sala de aula relativos às discussões coletivas sobre as resoluções das tarefas propostas mostra que os alunos usam uma diversidade de procedimentos e que estes evoluem significativamente ao longo da experiência de ensino. Esta evolução parece ser suportada pelas características das tarefas, os seus contextos e números, assim como pela articulação, desde logo estabelecida, entre a divisão e a multiplicação. Além disso, o recurso ao modelo retangular parece, também, ter contribuído para a progressão para procedimentos multiplicativos, baseados na decomposição de um dos fatores. Os resultados do estudo permitem ainda perceber que a evolução dos procedimentos usados pelos alunos e a sua diversidade não são alheias ao ambiente de sala de aula construído.

Palavras-chave: aprendizagem da divisão, tarefas, procedimentos usados pelos alunos

Abstract: This article presents and discusses some aspects of learning division by natural numbers and focuses on procedures used by pupils of the 3rd year in solving division tasks. The results are part of a wider research project into the way pupils improve their multiplication skills from the perspective of developing their numerical sense. The research



Mendes, F. (2013). A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos. *Da Investigação às Práticas*, 3(2), 5-30.

Contacto: Fátima Mendes, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal / fatima.mendes@ese.ips.pt

adopted a design research methodology, in the format of teaching experiments. An analysis of the pupils' written productions and of group classroom discussions about ways of solving the problems set shows that pupils use a variety of strategies and that there is a significant evolution over the course of their schooling. This evolution would appear to be linked to the features of the tasks, their contexts and numbers and also to the long-established relationship between division and multiplication. In addition, use of the rectangular model would also seem to have contributed to the progression to multiplication procedures based on the decomposition of one of the factors. The results of the study further suggest that the evolution and diversity of the procedures used by the pupils are not at odds with the atmosphere created in the classroom.

Key words: learning division, tasks, procedures used by the pupils

Résumé: Cet article présente et discute certains aspects concernant l'apprentissage de la division avec des nombres naturels, en se concentrant sur les procédures utilisées par les élèves dans une classe de troisième année de scolarité dans la résolution de tâches de division. Les résultats présentés font partie d'une recherche plus large qui visait à comprendre comment les élèves approfondissent l'apprentissage de la multiplication dans une perspective de développement du sens du nombre. La recherche réalisée a suivi une méthodologie de *design research*, dans la modalité d'expérience d'enseignement. L'analyse des productions écrites des élèves et des épisodes de salle de classe relatifs à des discussions collectives sur les résolutions des tâches proposées montre que les élèves utilisent une variété de procédures et que celles-ci évoluent significativement au cours de l'expérience d'enseignement. Cette évolution semble être soutenue par les caractéristiques des tâches, leurs contextes et nombres ainsi que par l'articulation, initialement établie entre la division et la multiplication. En outre, l'utilisation du modèle rectangulaire semble également avoir contribué à la progression dans les procédures multiplicatives, basées sur la décomposition de l'un des facteurs. Les résultats de l'étude permettent également de constater que l'évolution des procédures utilisées par les élèves et leur diversité ne sont pas étrangères à l'environnement de salle de classe construit.

Mots-clés: apprentissage de la division, tâches, procédures utilisées par les élèves

INTRODUÇÃO

A operação divisão e a sua aprendizagem é frequentemente associada a dificuldades por parte dos alunos. Os próprios professores dos 1.º e 2.º ciclos referem-se a esta operação como a mais difícil de ensinar aos seus alunos. Além disso, a sua aprendizagem é, muitas vezes, confundida com a mecanização das regras associadas ao algoritmo, não deixando espaço, na sala de aula, para o desenvolvimento de um trabalho com os alunos em torno da compreensão desta operação. Ora, a aprendizagem da divisão é muito mais do que saber usar o algoritmo tradicional, significa reconhecer esta operação em diferentes situações, ser capaz de compreender e usar a relação entre a divisão e a multiplicação e desenvolver uma teia de

relações numéricas que permita calcular de modo flexível, tendo subjacentes as propriedades destas operações.

Este artigo apresenta uma perspectiva sobre a aprendizagem da divisão, focando-se numa parte de uma investigação mais ampla (Mendes, 2012) que teve dois objetivos: (i) compreender o modo como alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, no âmbito de uma trajetória de aprendizagem; e (ii) descrever e analisar as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas, na aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. Nesta investigação o desenvolvimento do sentido de número foi assumido como o eixo orientador da aprendizagem da multiplicação.

Subjacente à conceção e concretização de uma trajetória de aprendizagem numa turma do 3.º ano de escolaridade, esteve o trabalho conjunto entre a professora Isabel, titular da turma, e a investigadora, autora deste artigo.

Um dos pressupostos-chave desta investigação em torno da aprendizagem da multiplicação incluiu o assumir a inter-relação entre esta operação e a divisão. Desta opção decorreu a construção e exploração, na sala de aula, de tarefas de divisão. Este artigo tem como objetivo analisar os procedimentos usados pelos alunos de uma turma do 3.º ano de escolaridade na resolução de tarefas de divisão, tendo como ponto de partida as suas produções escritas e episódios de sala de aula relativos a discussões coletivas.

A APRENDIZAGEM DA DIVISÃO

A aprendizagem da divisão com compreensão

Na sua explicitação das Normas para os Números e as Operações, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) considera que todos os alunos, do pré-escolar ao 12.º ano (K-12), devem compreender o significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si, calcular com destreza e fazer estimativas plausíveis (NCTM, 2007). No que diz respeito, em particular, à operação divisão de números naturais, o NCTM preconiza para os três primeiros anos (K-2) um trabalho ao nível da sala de aula, ancorado na exploração de tarefas com contextos diversificados, que promova a compreensão dos alunos das diversas situações associadas à divisão, realçando as que correspondem à partilha. Do 3.º ao 5.º ano, o trabalho a realizar com os alunos deve promover a compreensão aprofundada desta operação, alargando progressivamente o universo numérico, utilizando números cada vez maiores bem como números racionais não negativos na sua representação decimal. Além disso, “os alunos deverão centrar-se nos significados e nas relações entre a multiplicação e a divisão.” (NCTM, 2007, p. 175). Neste sentido, devem ser propostas aos alunos diferentes situações, a partir das quais estes desenvolvam a sua compreensão sobre os vários significados da operação e sejam capazes de calcular usando formas de cálculo eficazes e precisas, adequadas a cada uma delas.

No mesmo sentido, surgem as referências à operação divisão no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). Também Fosnot e Dolk (2001) preconizam um trabalho sobre a divisão a partir da exploração de contextos associados a situações de medida e de partilha e da exploração de relações entre eles. Efetivamente, no início da sua aprendizagem os alunos revelam, por vezes, maior dificuldade na resolução de situações de partilha do que de medida

(Fosnot & Dolk, 2001). Este facto relaciona-se com os procedimentos informais que os alunos começam por construir na resolução de tarefas de divisão.

Nas situações de medida o tamanho do grupo é especificado no problema e aquilo que é preciso saber é o número de grupos (por exemplo, no problema *Quantas caixas de 6 ovos são precisas para embalar 24 ovos?*, o tamanho do grupo é 6 e é necessário calcular quantas caixas são necessárias). Assim, na resolução deste tipo de situações, os alunos começam por construir procedimentos de contagem, aditivos ou subtrativos, dando saltos correspondentes ao tamanho do grupo ou adicionando ou subtraindo o mesmo número.

No caso das situações de divisão por partilha, é necessário saber quantos são em cada grupo, sabendo o número de grupos (por exemplo no problema *Quantos ovos coloco em cada caixa se tenho de embalar 24 ovos em 4 caixas?*, sabe-se que há 4 caixas mas não se sabe quantos ovos leva cada uma delas. Contudo, uma vez que os alunos têm tendência para construir um procedimento focado no número em cada grupo, mais do que nos grupos em si e na sua relação com o todo, este tipo de problemas é, frequentemente, mais difícil para eles (Fosnot & Dolk, 2001). Neste caso os alunos começam por construir procedimentos de tentativa e erro.

A maior dificuldade na compreensão das situações de partilha está relacionada com a compreensão da correspondência um a um que lhes está associada. De facto, neste tipo de situações os alunos têm de considerar, em simultâneo, o número de grupos, o número em cada grupo e o todo, ou seja, está em causa uma ideia-chave que é a compreensão da relação parte/todo (Fosnot & Dolk, 2001). Esta ideia-chave vai sendo desenvolvida pelos alunos através da resolução de problemas de divisão por partilha e da sua reflexão sobre o que fizeram.

A compreensão dos alunos associada à operação divisão desenvolve-se, também, através do estabelecimento de relações entre contextos de divisão por medida e por partilha, de modo que seja possível comparar os procedimentos construídos pelos alunos num caso e noutro.

A relação entre a divisão e a multiplicação

Associada à compreensão sobre a divisão está, ainda, o entendimento sobre a sua relação com a multiplicação e, de um modo geral, com as estruturas multiplicativas. A explicitação da relação entre as duas operações e o seu uso em situações de cálculo são referidos na maioria dos documentos de natureza curricular, quando se reportam à aprendizagem destas operações (Fosnot & Dolk, 2001; ME, 2007; NCTM, 2007).

O NCTM menciona, numa das suas normas relativas ao Número e Operações para os anos 3-5, a compreensão sobre o modo como se relacionam as operações entre si, apontando especificamente “identificar e usar as relações entre as operações, tais como a divisão como inversa da multiplicação, para resolver problemas” (NCTM, 2007, p. 148). A mesma relação e a sua potenciação em situações de cálculo são, ainda, mencionadas em outros documentos de natureza curricular em inglês (ACARA, 2010; DfEE, 1999; ME, 2007).

A importância do conhecimento da relação inversa entre a multiplicação e a divisão e a sua aplicação em situações de cálculo é explicitada, também, por Treffers e Buys (2008) quando concretizam uma trajetória de ensino e aprendizagem relativa a estas duas operações (van den Heuvel-Panhuizen, 2008). Aqueles autores realçam o facto de, no início da sua aprendizagem, a divisão poder surgir informalmente, não apenas a partir de subtrações sucessivas mas, também, a partir de uma exploração geral da multiplicação em que surge como inversa desta

operação. Além disso, sugerem uma abordagem da divisão através da sua relação com a multiplicação, potencializando o conhecimento que os alunos já têm sobre esta última e usando-a também para verificar os resultados obtidos (Treffers & Buys, 2008).

A relação inversa entre a divisão e a multiplicação está relacionada com a ideia mais geral de inversão que é fundamental tanto ao nível das estruturas matemáticas como das experiências físicas e sociais das pessoas. Deste ponto de vista, e no que respeita à aritmética, a relação inversa entre a multiplicação e a divisão tem implicações importantes no cálculo eficiente e flexível e na avaliação da compreensão conceptual dos alunos (Greer, 2012).

Os modelos que suportam a resolução de tarefas de divisão

Associados à relação entre as operações divisão e multiplicação, estão os modelos que podem ser usados pelos alunos na resolução das tarefas de divisão. No início da aprendizagem, os modelos construídos pelos alunos estão muito associados à sua interpretação da situação proposta e emergem da representação da ação, denominando-se por modelos de situação (Gravemeijer, 2005). Por isso, os contextos das tarefas têm tanta importância para o desenvolvimento de modelos a eles associados, embora nem sempre os alunos as resolvam recorrendo a modelos que o professor antecipou.

Para ilustrar o raciocínio dos alunos na resolução de determinadas situações, também o professor pode recorrer ao uso de modelos, ou seja, utiliza o que Gravemeijer (2005) denomina por modelos de estratégias. Este uso de modelos enquanto ferramenta didática, para além de auxiliar as discussões sobre os procedimentos construídos pelos alunos, incentiva-os, também, a recorrer a eles para representar o seu próprio modo de pensar. Deste modo, os modelos evoluem de modelos de situação para modelos para pensar, ou seja, modelos matemáticos de relações numéricas (Fosnot & Dolk, 2001; Gravemeijer, 2005).

Com um lugar de destaque na aprendizagem da multiplicação e, consequentemente, na aprendizagem da divisão, surge o modelo retangular. Este modelo é considerado por diversos autores como uma das representações mais potentes, que suporta a evolução do raciocínio multiplicativo (Barmby, Bilsborough, Harries & Higgins, 2009; Battista, Clements, Arnoff, Battista & Borrow, 1998). Um dos aspetos que evidencia a sua importância diz respeito à sua eficácia na visualização da propriedade comutativa da multiplicação e das várias partições dos números que podem ser realizadas, baseadas na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (Barmby et al., 2009). O modelo retangular pode encarado como modelo de situação, de estratégia ou para pensar, de acordo com o seu uso.

Os procedimentos usados pelos alunos em tarefas de divisão

Uma grande parte das investigações sobre os procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de divisão caracteriza os procedimentos informais na resolução de problemas associados a esta operação (Ambrose, Baek & Carpenter, 2003; Anghileri, 2001; Baek, 2006; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999). Há, também, estudos que apresentam categorizações mais abrangentes dos procedimentos usados pelos alunos, válidas para as quatro operações (Foxman & Beishuizen, 2002; Hartnett, 2007). Nestes estudos são usadas denominações diferentes tais como *procedimentos*, *métodos*, *algoritmos informais* para se referirem os procedimentos usados pelos alunos. Neste artigo optei pela designação de *procedimento*, considerando que este inclui a escolha, por parte dos alunos, das opções associadas à estrutura da tarefa e o modo como organizam e realizam os cálculos que

efetuam, de acordo com os números envolvidos. Esta designação integra aspetos do que Beishuizen (1997) considera como estratégia e como procedimento.

Ambrose et al. (2003) efetuaram uma investigação com alunos dos oito aos onze anos, na qual caracterizaram os procedimentos usados pelos alunos na resolução de problemas de divisão de partilha e de medida. De um modo geral, os autores identificaram as seguintes categorias de procedimentos: (i) trabalhar com um grupo de cada vez, (ii) não decompor o dividendo, (iii) decompor o dividendo e (iv) procedimentos de construção (*building up*).

A primeira das categorias – trabalhar com um grupo de cada vez – refere-se à utilização de subtrações sucessivas do número mais pequeno (divisor) a partir do número maior, à adição sucessiva do número mais pequeno até perfazer o número maior (ou ficar próximo) e ao procedimento distributivo. No início, os dois primeiros procedimentos são usados, sobretudo, em problemas que envolvem a divisão por medida, uma vez que, na divisão por partilha, não se conhece, à partida, o número que se vai adicionar ou subtrair repetidamente. O terceiro, procedimento distributivo, é utilizado pelos alunos em problemas de divisão por partilha, e consiste em articular o seu conhecimento sobre os números (por exemplo, sobre múltiplos de dez, de cinco e de dois) com representações visuais. O exemplo que o ilustra refere-se ao cálculo $228:12$ (partilhar 228 *smarties* por 12 crianças), em que uma aluna, através de uma representação esquemática, distribui dez *smarties* por cada criança, depois cinco e, em seguida dois, duas vezes, até os esgotar (Ambrose et al., 2003).

A segunda categoria – não decompor o dividendo – inclui procedimentos mais abstratos e avançados relativamente aos anteriores. Estes não envolvem a decomposição do dividendo e correspondem à subtração, de modo eficaz, recorrendo à estrutura decimal e ao uso de múltiplos de dez. Por exemplo, para embalar 896 maçãs em embalagens de 35 cada, um problema de divisão por medida, um aluno começa por pensar em múltiplos de dez do divisor. Então subtrai duas vezes 350 (10×35) do dividendo, depois duas vezes 70 (2×35) e, finalmente, 35. Deste modo, o quociente é obtido adicionando $10+10+2+2+1$. Este tipo de procedimentos é utilizado pelos alunos tanto em problemas de divisão por medida como por partilha e, embora sejam procedimentos mais abstratos e eficazes do que os anteriores, têm flexibilidade limitada (Ambrose et al., 2003).

A terceira categoria – decompor o dividendo – diz respeito ao uso de procedimentos que recorrem à decomposição do dividendo, por exemplo, em centenas, dezenas e unidades e a divisões parciais. Ilustrando o seu uso quando se pretende dividir 896 por 35, divide-se, por partes, 800, 90 e 6 por 35, adicionam-se os restos obtidos e torna-se a dividir, até ser possível fazê-lo. Este tipo de procedimentos é utilizado pelos alunos tanto em problemas de divisão por medida como por partilha. Apesar de não ser particularmente eficiente, o uso deste tipo de procedimento evidencia compreensão, por parte dos alunos, da divisão e das suas propriedades (Ambrose et al., 2003).

A última categoria – procedimentos de construção – inclui procedimentos que são usados, também, em problemas de divisão por medida e por partilha. Um dos exemplos ilustrativos é o da divisão $544:17$, que foi resolvida por um aluno que partiu de 170 (10×17) e adicionou sucessivamente 170 até ser exequível, de modo a perfazer um número o mais próximo possível de 544 (o número 510). Depois adicionou 34 (2×17) para chegar ao total de 544. Deste modo, o quociente 32 foi obtido adicionando $10+10+10+2$ (Ambrose et al., 2003). Este tipo de procedimentos está bastante ligado aos que os alunos inventam para resolver problemas de multiplicação análogos, em que um dos fatores é desconhecido.

Os procedimentos de construção parecem pouco eficientes à partida, pois uma das dificuldades dos alunos é pensar em produtos que se aproximem rapidamente do número que corresponde ao dividendo. Ainda assim, os seus inventores são capazes de os justificar e de os tornar mais rápidos e eficazes em problemas seguintes, melhorando cada vez mais e reduzindo o número de produtos necessários para alcançar o dividendo. Além disso, o facto de este procedimento poder estar associado à adição permite a alguns alunos recorrer ao uso de dobros, o que se torna mais complexo se os alunos usarem procedimentos de subtração para resolver problemas de divisão. Por vezes, ao inventar e utilizar procedimentos de construção na resolução de problemas de divisão, os alunos ultrapassam o valor do dividendo (ao qual querem “chegar”) e a seguir compensam usando a subtração (Ambrose et al., 2003).

De acordo com os autores supramencionados, tal como no caso da multiplicação, o contexto dos problemas propostos tem uma grande influência nas decisões dos alunos sobre os procedimentos que inventam. Além disso, os procedimentos utilizados variam, também, de acordo com o seu conhecimento sobre factos numéricos, valor de posição e as propriedades das quatro operações aritméticas. Ambrose et al. (2003) referem ainda que, enquanto na multiplicação os procedimentos utilizados pelos alunos são sensíveis aos papéis diferentes desempenhados pelo multiplicador e pelo multiplicando, na divisão, estes são influenciados pelo facto de os problemas a resolver serem de divisão no sentido de medida ou de partilha.

Uma das conclusões do estudo desenvolvido por Ambrose et al. (2003) tem algumas implicações curriculares. Os autores referem que os alunos não consideram os problemas de divisão muito diferentes dos de multiplicação e, que “muitos dos algoritmos de divisão inventados¹ para as situações de divisão eram essencialmente imagens em espelho dos algoritmos de multiplicação inventados correspondentes” (p. 329). O procedimento de não alterar o multiplicando, na multiplicação, foi adaptado para situações de divisão, havendo um maior paralelismo entre os algoritmos inventados pelos alunos para ambas as operações do que no caso dos algoritmos tradicionais. Este aspeto coloca a questão curricular de optar pelo trabalho em torno destas duas operações ao mesmo tempo e não deixar, como acontece frequentemente, o trabalho focado na divisão para mais tarde.

A propósito de uma investigação que comparava os procedimentos usados pelos alunos ingleses e holandeses, Anghileri (2001) identifica e caracteriza, detalhadamente, os procedimentos usados pelos alunos ingleses do 5.º ano, de dez escolas diferentes, na resolução de problemas de divisão com contextos de partilha e de medida ou em cálculos de divisão como $96 \div 6$. A análise das categorias identificadas a partir desta investigação revela bastantes semelhanças com as organizadas por Ambrose et al. (2003). Há procedimentos

¹ A designação *algoritmo inventado* é usada na aceção de *procedimento*.

identificados que, por exemplo, se incluem nas categorias de decomposição e outros que correspondem à categoria de procedimentos de construção.

O estudo realizado por Anghileri (2001) aponta para a necessidade de os professores proporem tarefas aos alunos que promovam o desenvolvimento de procedimentos intuitivos inventados pelos alunos e que, ao mesmo tempo, os auxiliem a progredir em termos da sua compreensão da divisão. Além disso, a autora realça que, uma vez que os alunos devem ser encorajados a inventar os seus procedimentos, é importante a discussão sobre a sua eficácia, à medida que os números usados vão sendo cada vez maiores, no sentido de aqueles irem evoluindo. Uma vez que foram propostos diferentes tipos de problemas e de cálculos de divisão, há alguns resultados do estudo que apontam para a influência da estrutura do problema, do tipo e grandeza dos números e do facto de ter ou não contexto, nos procedimentos informais e no seu sucesso (Anghileri, 2001).

Focando-se especificamente em procedimentos de cálculo mental utilizados na resolução de problemas de palavras que envolviam a multiplicação e a divisão com números com um, dois e três dígitos, Heirdsfield et al. (1999) desenvolveram um estudo longitudinal com 95 alunos do 4.º ao 6.º ano. A análise dos procedimentos usados, tanto nos problemas de multiplicação como nos de divisão, permitiu a sua organização em cinco categorias diferentes: procedimentos de contagem, uso de factos básicos, decomposição dos números segundo o valor de posição e cálculo da direita para a esquerda, decomposição dos números segundo o valor de posição e cálculo da esquerda para a direita e procedimentos holísticos. Os resultados deste estudo, que durou três anos e ao longo do qual foram introduzidos os algoritmos, apontam para uma mudança nos procedimentos usados pelos alunos. Contudo, esta mudança não foi a esperada, no que se refere à evolução dos alunos para o uso de procedimentos mais sofisticados, como os holísticos. O estudo evidencia que muitos dos alunos do 6.º ano foram capazes de usar procedimentos holísticos na resolução de problemas de multiplicação e de divisão com números 'grandes', mas muitos outros permaneceram nos procedimentos de contagem. Ainda assim, apesar de haver uma progressão no uso de procedimentos holísticos quando estes se revelaram apropriados, nem sempre isso aconteceu. Além disso, quando se comparou a frequência do uso de procedimentos holísticos com a frequência do uso de procedimentos algorítmicos, verificou-se que estes foram muito mais utilizados (Heirdsfield et al., 1999).

Verschaffel, Greer e Torbeyns (2006), numa síntese da investigação associada à análise dos procedimentos de cálculo de multiplicação e divisão usados pelos alunos, sem haver intervenção ao nível do seu ensino na sala de aula, organizam-nos em: modelação direta, número completo, partição de números e procedimentos de compensação. Comparando com as categorias identificadas por Heirdsfield et al. (1999), os procedimentos de modelação direta correspondem aos de contagem, os de decomposição aos que envolvem, também, a decomposição e o valor de posição e, tanto os procedimentos de número completo como os de compensação se incluem na categoria dos procedimentos holísticos.

Considerando as necessidades e exigências do mundo atual, Verschaffel, et al. (2006), concluem que é preciso investir na sala de aula, ao nível da multiplicação e da divisão, em propostas que promovam o uso de procedimentos holísticos, de decomposição não apenas decimal, e de tentativa e erro. Para que isso seja possível, deve haver uma menor ênfase no trabalho com os algoritmos e um maior realce para o trabalho associado às propriedades das operações e ao uso de procedimentos de cálculo flexíveis (Heirdsfield et al., 1999).

Tendo subjacente a importância do desenvolvimento de procedimentos de cálculo mental, Hartnett (2007) apresenta e analisa uma categorização única para as quatro operações aritméticas, de modo a suportar o seu ensino e encorajar a sua discussão na sala de aula. A autora propõe cinco categorias de procedimentos de cálculo mental, comuns às quatro operações aritméticas e que, por sua vez, se subdividem em vinte e uma subcategorias. As cinco categorias de procedimentos são as seguintes: contar para a frente e para trás, ajustar e compensar, usar dobros e/ou metades, usar partições de números e usar o valor de posição. Para cada uma destas categorias, a autora apresenta as subcategorias respetivas, de acordo com as diferentes operações aritméticas e relaciona-as, sempre que possível, com categorias apresentadas por outros autores. A categorização de procedimentos apresentada por Hartnett (2007) é semelhante às referidas por outros autores, embora, por vezes, com outras denominações. Ainda assim, considero-a bastante relevante e abrangente, por ser comum às quatro operações aritméticas e, ao mesmo tempo, ser muito detalhada.

Uma outra categorização dos procedimentos utilizados pelos alunos, que abrange as quatro operações aritméticas, surge a propósito de uma reanálise dos dados relativos aos procedimentos de cálculo mental usados por alunos de onze anos de Inglaterra, País de Gales e Irlanda. Foxman e Beishuizen (2002) organizam os procedimentos de cálculo mental em duas grandes categorias gerais: procedimentos de número completo e procedimentos de decomposição. Segundo os próprios autores, estas categorias incluem a maior parte dos procedimentos utilizados pelos alunos quando efetuam cálculos com números em contexto e sem contexto. Os mesmos investigadores identificam, ainda, uma outra categoria geral, associada à substituição de um número por outro, simplificando um determinado cálculo e compensando depois, que denominam por *arredondar*, *multiplicar* e *compensar*. Este tipo de procedimento é utilizado nos cálculos multiplicativos, tanto em articulação com procedimentos de número completo como ligado a procedimentos de partição.

A análise comparativa das diferentes categorizações apresentadas permite destacar duas grandes categorias de procedimentos, de número completo e baseados na decomposição. A primeira inclui procedimentos baseados nas características dos números envolvidos nos cálculos, que são trabalhados como um todo, e a segunda inclui os procedimentos que têm subjacentes decomposições do dividendo. Além destas duas grandes categorias há, ainda, a referir os procedimentos de compensação que, para uns, se incluem nos procedimentos holísticos (Heirdsfield et al., 1999) e, para outros, são mais uma categoria (Hartnett, 2007).

METODOLOGIA

O estudo realizado seguiu uma metodologia de *design research* (Cobb, Zhao & Dean, 2009) na modalidade de experiência de ensino (Kelly & Lesh, 2000). Esta foi desenvolvida, durante um ano letivo, pela investigadora em colaboração com Isabel, a professora de uma turma de 3.º ano, com 23 alunos. Nesse âmbito realizaram-se, semanalmente, reuniões entre as duas, com o objetivo de preparar as aulas e refletir sobre o trabalho que ia sendo realizado. Na sala de aula, a investigadora tinha, apenas, o papel de observadora.

As fontes principais de dados foram as aulas observadas, as reuniões de trabalho com Isabel, a própria professora e os alunos. Os elementos objeto de análise foram as notas de campo resultantes da observação em sala de aula e das conversas informais da investigadora com Isabel, os relatórios elaborados logo após as aulas, os registos videogravados das aulas, as transcrições de excertos das aulas videogravadas, as produções dos alunos resultantes da

resolução das tarefas propostas e documentos de natureza variada, tais como outros materiais de apoio às aulas, os memorandos produzidos pela investigadora na preparação das reuniões semanais com a professora e os relatórios de observação elaborados logo após as mesmas. A análise dos dados, de carácter interpretativo, foi realizada indutivamente.

Na sala de aula, a experiência de ensino concretizou-se através de uma trajetória de aprendizagem, na aceção de Simon (1995). De acordo com este autor, uma trajetória de aprendizagem é um caminho de aprendizagem que inclui três componentes, o objetivo da aprendizagem, o conjunto de tarefas concebido pelo professor, tendo em conta as ideias e os procedimentos que quer que o aluno desenvolva e uma previsão do processo através do qual os alunos pensam e aprendem, no contexto das tarefas propostas. Uma trajetória de aprendizagem envolve, simultaneamente, objetivos matemáticos, modelos de pensamento dos alunos, modelos dos professores e investigadores sobre o pensamento dos alunos, sequências de tarefas de ensino e a interação de todos estes (Simon, 1995).

Existe um conjunto de razões que justificam o recurso a uma trajetória de aprendizagem e não a uma planificação das tarefas de aprendizagem, no sentido tradicional do termo: (i) a natureza socialmente situada da trajetória; (ii) o encarar a trajetória como um ciclo iterativo de planificações e não qualquer coisa que se faz apenas uma vez; (iii) o foco nas produções dos alunos, mais do que no conteúdo matemático e, finalmente, (iv) a possibilidade de oferecer ao professor uma teoria fundamentada que descreve como é que um certo conjunto de atividades de ensino pode funcionar num dado contexto social (Gravemeijer, Bowers & Stephan, 2003).

A trajetória de aprendizagem incluiu um conjunto de sequências de tarefas construídas e exploradas na sala de aula, considerando os objetivos do professor, e assenta nos contextos, nos modelos e nos procedimentos de cálculo associados a esta operação. O seu propósito foi a progressão dos alunos em termos da sua aprendizagem, tendo por base as ideias de Treffers e Buys (2008) e de Fosnot e Dolk (2001).

Na experiência de ensino foram seguidas opções no sentido de diversificar e alternar o tipo de tarefas propostas aos alunos – problemas e cadeias numéricas (na aceção de Fosnot e Dolk (2001)) – interligadas entre si. Além disso, uma vez que o seu propósito global era a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, o universo numérico das tarefas propostas incluiu não só os números naturais mas também outros números racionais não negativos, em particular, na sua representação decimal. Houve, ainda, uma escolha intencional dos números envolvidos nas diferentes tarefas, tendo em conta a progressão em termos da sua ordem de grandeza e as relações numéricas que poderiam ser estabelecidas entre eles. Finalmente, um outro aspeto que foi considerado na experiência de ensino foi a inclusão de tarefas com contexto de divisão, privilegiando a relação entre as duas operações.

No âmbito da concretização da trajetória de aprendizagem da multiplicação na turma do 3.º ano, foram realizadas pelos alunos onze sequências de tarefas. Destas onze sequências, duas delas (sequências 7 e 9) foram explicitamente de tarefas de divisão. Além disso, as sequências de tarefas de multiplicação incluíam, por vezes, tarefas com contexto de divisão articuladas com as anteriores.

Na análise dos dados recolhidos, dado o seu grande volume, as tarefas foram organizadas segundo características comuns: tarefas de multiplicação com números naturais, tarefas de

multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal, tarefas de divisão com números naturais e tarefas de multiplicação no sentido proporcional com números racionais não negativos na representação decimal. A partir da análise das produções escritas dos alunos foi feita a inventariação e caracterização dos seus procedimentos. Assim, na resolução das tarefas de divisão emergiram os seguintes procedimentos: adicionar sucessivamente, adicionar dois a dois, subtrair sucessivamente, usar uma decomposição não decimal de um dos fatores, usar a decomposição decimal de um dos fatores e multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência.

A análise da evolução dos procedimentos usados pelos alunos foi realizada considerando, para além das suas produções escritas, as transcrições de episódios da aula associados a momentos de discussão coletiva da sua exploração.

Considerando o âmbito deste artigo, foco-me apenas na análise dos procedimentos usados pelos alunos nas tarefas de divisão e na sua evolução.

UMA TAREFA DE DIVISÃO E OS PROCEDIMENTOS USADOS PELOS ALUNOS

A tarefa 20 e a sua exploração na sala de aula

A tarefa 20 – *Máquina de bebidas* está incluída na sequência 7, constituída por tarefas de divisão (Figura 1). É a segunda tarefa desta sequência e inclui dois problemas (subtarefas 1 e 2) com contextos de divisão, um por medida e outro por partilha, em que os números usados são os mesmos. Para além dos objetivos associados à aprendizagem da divisão, esta tarefa tem, também, a finalidade de tentar perceber se os alunos resolvem os dois problemas que a constituem de modo independente, ligando-os ao contexto, ou se percebem a relação entre os números e resolvem apenas um, usando o mesmo resultado na outra. A tarefa 20 foi adaptada de Natale e Fosnot (2007).

1. A Raquel viu uma senhora encher uma máquina de venda de garrafas de água e resolveu conversar com ela. Ficou a saber que a máquina leva 156 garrafas.



A Raquel sabe que, no supermercado, as embalagens trazem 6 garrafas de água. Então interrogou-se sobre quantas embalagens precisaria para encher a máquina. Queres ajudar a Raquel?

2. A Raquel descobriu que há outra máquina de venda de sumos que também leva 156 garrafas. Nesta máquina há 6 tipos diferentes de sumo: maçã, pêra, pêssego, uva, laranja e ananás, havendo a mesma quantidade de garrafas de cada um. Quando está cheia, quantas garrafas de sumo de cada sabor leva a máquina?



Figura 1: Tarefa 20 – Máquina de bebidas (subtarefas 1 e 2)

Os alunos representam uma adição de parcelas iguais a 6 e adicionam sucessivamente duas a duas até perfazer 96. Nessa altura registam o número 16 à esquerda do 96, para simbolizar 16 garrafas de cada sabor e evoluem para um procedimento mais potente e menos moroso, adicionando de uma vez só o número 60, que corresponde a dez garrafas de cada sabor. Depois, fazem a correspondência entre $96+60$ e $16+10$, chegando à solução do problema, ou seja, 26 garrafas.

No decurso da discussão coletiva associada à resolução desta tarefa, a última parte da resolução de Guilherme, Gustavo e Leandra suscita algumas dúvidas e alguns colegas interpelam-nos a pedir explicações:

David – Não percebo que risco é este aqui e o que quer dizer (apontando para o póster dos colegas).

Guilherme – Quer dizer que 60 são dez grupos de garrafas.

Eva – Eu não percebo porque é que puseram menos (–) aqui (entre 96 e 16 e entre 60 e 10).

Guilherme – Não é menos, é para dizer que 96 é o mesmo que 16 grupos de seis e 60 é o mesmo que 10 grupos de seis garrafas.

Gustavo – Isto quer dizer 10 vezes seis. O Guilherme acertou logo no 60 muito depressa e por isso pôs assim.

Guilherme – Porque nós sabemos que 60 são 10 grupos de seis e por isso pusemos logo 60, em vez de continuar a fazer seis mais seis.

Os elementos do grupo explicam que o traço que registam não é o sinal de subtração mas indica a correspondência entre 96 ou 60 (número total de garrafas) e 16 ou 10 (número de grupos de garrafas). De uma forma muito intuitiva e informal, estes alunos evoluem, na mesma resolução, de um procedimento aditivo para um procedimento que tem subjacente a ideia de multiplicação. Este progresso parece ter sido provocado pelo grande número de parcelas que é preciso adicionar, mesmo começando a adicioná-las duas a duas.

Joana e Patrícia são um dos pares que, na resolução da sub tarefa 1, opta por construir um procedimento baseado na subtração.

Problema 1

$$156 : 6 = 26$$

Problema 2

$$156 : 6 = 26$$

Correspondence Table:

156 - 6 = 150	18 - 6 = 12
150 - 6 = 144	12 - 6 = 6
144 - 6 = 138	6 - 6 = 0
138 - 6 = 132	
132 - 6 = 126	
126 - 6 = 120	
120 - 6 = 114	
114 - 6 = 108	
108 - 6 = 96	
96 - 6 = 90	
90 - 6 = 84	
84 - 6 = 78	
78 - 6 = 72	
72 - 6 = 66	
66 - 6 = 60	
60 - 6 = 54	
54 - 6 = 48	
48 - 6 = 42	
42 - 6 = 36	
36 - 6 = 30	
30 - 6 = 24	
24 - 6 = 18	

Annotations:

- Problem 1:** "Somos usando o 60" (We are using 60), "156 : 6 deu 26" (156 : 6 gave 26), "simboliza 6 garrafas" (symbolizes 6 bottles).
- Problem 2:** "Porque se fazemos a mesma coisa" (Because if we do the same thing), "temos a mesma coisa" (we have the same thing), "temos a mesma coisa" (we have the same thing).

Figura 3: Resolução de Joana e Patrícia da tarefa 20 (subtarefas 1 e 2)

Joana e Patrícia identificam o problema como sendo de divisão, começando por registar $156 \div 6$. Para encontrar a solução subtraem, sucessivamente, 26 vezes o número 6. Na resolução do segundo problema (subtarefa 2) registam apenas a divisão com indicação do quociente. Na sua justificação escrevem: “Porque no problema anterior havia o mesmo resultado. Fomos à tabuada do 6 e vimos que é 26 sabores”. Quando interpeladas pela professora, na discussão coletiva, Joana explica:

Joana – Como eram os mesmos números pensámos que eram 26 garrafas de cada sabor mas fomos verificar com a tabuada do 6.

Apesar de terem usado um procedimento de tipo subtrativo na subtarefa 1 e terem identificado em ambas a divisão (Figura 3), as alunas justificam, recorrendo à multiplicação, que 26 é de facto o valor que corresponde ao quociente $156 \div 6$. O seu raciocínio sugere que reconhecem a relação entre as duas operações, apesar de não a terem conseguido utilizar no cálculo inicial. É de notar que as alunas escrevem “26 sabores” em vez de “26 garrafas de cada sabor”, aspeto que parece não ter interferido na compreensão e resolução do problema.

Os alunos que constroem procedimentos multiplicativos na resolução da tarefa 20 fazem-no de diferentes modos. Ana Rita e Miguel são um dos pares que usam um procedimento de multiplicações sucessivas para resolver a tarefa, começando pela subtarefa 2.

2. $156 : 6 = 26$

$6 \times 6 = 36$	$20 \times 6 = 120$	$26 \times 6 = 156$
$6 \times 7 = 42$	$21 \times 6 = 126$	26 garrafas de cada sabor?
$6 \times 8 = 48$	$22 \times 6 = 132$	
$6 \times 9 = 54$	$23 \times 6 = 138$	
$6 \times 10 = 60$	$24 \times 6 = 144$	
$6 \times 11 = 66$	$25 \times 6 = 150$	

Figura 4: Resolução de Ana Rita e Miguel da subtarefa 2 – tarefa 20

Estes alunos reconhecem o problema como sendo de divisão e, para calcular $156 \div 6$, efetuam uma procura sistemática do número que multiplicado por seis é igual a 156. Iniciam os cálculos em 6×6 , cujo valor sabem automaticamente, e realizam todos os produtos até 6×11 , saltando depois para 20×6 até ao produto 26×6 . A sua resolução parece evidenciar que, após terem calculado 6×11 , se apercebem que o número que procuram ainda está muito “longe” e, por isso, usam o seu conhecimento sobre o cálculo com múltiplos de dez, para mais rapidamente “chegarem” ao número 26.

Luís e Raquel identificam a subtarefa 1 como sendo de divisão e, para determinar o quociente pretendido, usam procedimentos multiplicativos.

① $60 \times 2 = 120$ $120 \times 3 = 360$
 $156 : 6 = 26$

$60 \overline{) 156}$
 $120 \overline{) 156}$
 $6 \times 6 = 36$

R. É preciso 26 embalagens para obter 156 garrafas. Nós pensamos que 60 em 10 em 120 em 20 embalagens e 6 x 6 em 36 por isso soma 6 + 20 = 26 embalagens.

Figura 5: Resolução de Luís e Raquel da sub tarefa 1 – tarefa 20

Estes alunos fazem uma primeira tentativa (que corresponde a um registo incorreto do ponto de vista matemático) de compor o número 156, usando a multiplicação e iniciando o cálculo pelo número 60, um múltiplo de seis e de dez. Depois realizam um conjunto de cálculos que lhes permite encontrar produtos parciais cuja soma é igual a 156. Voltam a usar o 60, que reconhecem como sendo igual a 10 embalagens de seis garrafas, progridem para 120, que identificam como 20 embalagens e, finalmente, calculam 6×6 , perfazendo 26 embalagens de seis garrafas. A sua resolução suscita algumas questões, por parte dos colegas, durante a fase de apresentação e discussão coletiva.

Bernardo – Não percebo como é que o Luís e a Raquel descobriram e começaram logo com 60.

Luís – Pensámos assim porque é um número muito fácil!

Bernardo – Mas porquê?

Luís – Porque depois pensámos no 120.

Professora – Luís e Raquel, o Bernardo quer saber como é que começaram logo por 60 e não por 50, por exemplo. O 50 também é um número fácil!

Luís – Mas aqui não é. O 60 é que é 10 vezes 6.

Professora – Pois é, porque estamos com embalagens de 6 garrafas.

Guilherme – Eu já percebi, mas eles enganaram-se porque têm 60, 120 e 6 e dizem que é 26 e assim é 36.

Luís – Mas isso é como pensamos, depois do 60 passámos para o 120.

Os alunos que usam procedimentos menos potentes nos problemas de divisão, como Bernardo, revelam algumas dificuldades na compreensão dos modos de pensar dos colegas. De facto, Bernardo na mesma tarefa usa um procedimento de adição sucessiva da parcela 6 e não consegue perceber o raciocínio multiplicativo dos colegas. Além disso, Luís e Raquel manifestam, também, alguma dificuldade na verbalização do seu raciocínio. Logo a seguir, Guilherme identifica um “engano”, suscitado pelo esquema realizado pelos colegas, que é esclarecido pelo seu autor.

Em síntese, a análise das produções dos alunos na resolução dos dois problemas da tarefa 20 revela que a sua evolução ao nível do uso de procedimentos não se processa do mesmo modo para todos. Embora alguns alunos já optem por procedimentos multiplicativos, relacionando entre si a multiplicação e a divisão, ainda há os que recorrem a procedimentos de tipo aditivo ou subtrativo. Além disso, os registos que incluem a divisão são bastante

frequentes, não só nos alunos que optam por procedimentos multiplicativos, mas também, nos que usam, ainda, procedimentos aditivos ou subtrativos.


O facto de muitos dos alunos terem, aparentemente, identificado que os cálculos a efetuar, nos dois problemas da tarefa 20, são os mesmos em termos matemáticos, apesar de as situações serem distintas e de os números envolvidos terem também significados diferentes, parece ser um indicador de que caminham progressivamente para a abstração, conseguindo “olhar” para os números e as operações de um ponto de vista matemático, distanciando-se do contexto em que estão inseridos.

UMA SEQUÊNCIA DE TAREFAS DE DIVISÃO E OS PROCEDIMENTOS USADOS PELOS ALUNOS

A sequência 9 de tarefas de divisão e a sua exploração na sala de aula

A sequência 9 inclui três tarefas (Figura 6) que pretendem continuar o trabalho em torno da divisão, encarando-a como inversa da multiplicação. A primeira tarefa (tarefa 25) parte de uma situação conhecida e já trabalhada pelos alunos, a das máquinas de bebidas, adaptada de Natale e Fosnot (2007). Neste caso, as garrafas para encher a máquina estão organizadas em embalagens de seis que, por sua vez, estão guardadas numa caixa com dez embalagens de seis garrafas. Um dos objetivos da tarefa é que os alunos percebam a eficácia do cálculo com múltiplos de dez, no caso de os números envolvidos serem suficientemente ‘grandes’. A segunda tarefa desta sequência, tarefa 26, envolve duas situações de divisão por partilha e o seu objetivo é compará-las, de modo a verificar se são situações justas.

No Pavilhão da Ciência a Raquel encontrou uma máquina nova de venda de água que estava a ser cheia.



A máquina leva, no total, 132 garrafas.
A água é entregue no Pavilhão em caixas com 10 embalagens de 6 garrafas cada.


1. Quantas embalagens de 6 garrafas de água são necessárias para a encher?
2. Quantas caixas cheias são necessárias?

Para a visita ao Jardim Zoológico, organizada pelo ATL, os alunos foram divididos por grupos, tendo cada grupo um monitor responsável.

O grupo do Guilherme ficou com oito alunos e o do Francisco com sete alunos.

A porta do Jardim Zoológico cada monitor recebeu um saco com miniaturas de animais para distribuir pelos alunos do seu grupo.

O saco do grupo do Guilherme tinha 256 miniaturas e o do grupo do Francisco tinha 224.



Guilherme Francisco

No intervalo para o lanche cada monitor distribuiu, igualmente, as miniaturas do seu saco pelos alunos do respetivo grupo.

Achas que é justa esta partilha das miniaturas de animais?

Depois das tarefas *Outra máquina de bebidas* e *Miniaturas de animais*, calcular em cadeia.

24:4=	130:13=	21:3=	140:14=
40:4=	143:13=	30:3=	154:14=
64:4=	260:13=	51:3=	280:14=
104:4=	273:13=	60:3=	294:14=
	247:13=	81:3=	266:14=

Figura 6: Sequência 9 - tarefas 25, 26 e 28

Finalmente, a última tarefa da sequência, tarefa 28, de acordo com as opções da experiência de ensino, inclui o cálculo de cadeias numéricas que potenciam a relação entre a divisão e a multiplicação e o uso de propriedades destas operações.

A propósito da resolução das tarefas da sequência 7, a professora Isabel introduziu o modelo retangular como modelo de apoio ao cálculo, tal como já tinha acontecido também a propósito da multiplicação. Deste modo, na resolução das tarefas da sequência 9, os alunos poderiam apoiar-se nele, se assim o entendessem. As tarefas desta sequência foram exploradas sequencialmente, em semanas diferentes, tendo a tarefa 25 sido resolvida individualmente pelos alunos e a tarefa 26 resolvida a pares.

Os procedimentos usados pelos alunos na tarefa 25 da sequência 9

A análise das produções dos alunos relativas à resolução do primeiro problema da tarefa 25 mostra que, embora haja alunos que recorrem a procedimentos multiplicativos corretos, há alguns alunos que não a resolvem ou o fazem incorretamente (num total de seis). Além disso há, ainda, um aluno que usa adições sucessivas e dois que utilizam subtrações sucessivas.

Bernardo é o único aluno que recorre à adição, em ambos os problemas da tarefa 25. No primeiro problema adiciona sucessivamente o número de garrafas (seis) de cada embalagem, até perfazer o total de 132 garrafas.

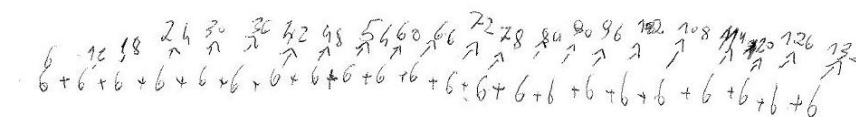


Figura 7: Resolução de Bernardo da subtarefa I – tarefa 25

De entre os procedimentos que se baseiam na multiplicação, destacam-se o uso de produtos sucessivos em que um dos fatores é seis e o outro vai variando, de modo que o produto final seja igual a 132 (utilizado por um total de nove alunos), e o uso de produtos parciais, baseados no modelo retangular, cuja soma seja, também, igual a 132 (apenas três alunos).

Guilherme é um dos alunos que realiza produtos sucessivos para resolver o problema.

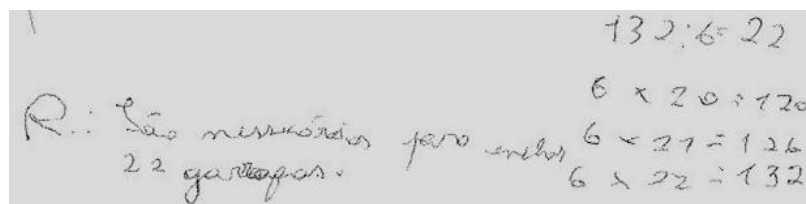


Figura 8: Resolução de Guilherme da subtarefa I – tarefa 25

Este aluno reconhece o problema como sendo de divisão e, fazendo a ligação com a multiplicação, procura um número que multiplicado por seis tenha um valor o mais próximo possível de 132. Começa por 6×20 , recorrendo a um múltiplo de dez e, em seguida, calcula dois produtos sucessivos até perfazer o produto necessário.

Gustavo também recorre à multiplicação para resolver a sub tarefa 1, mas apoia-se no modelo retangular.

Figura 9: Resolução de Gustavo da sub tarefa 1 – tarefa 25

Gustavo, tal como Guilherme, procura o número que multiplicado por seis é igual a 132 ou fica próximo e, inicia o cálculo, também, com o produto 6×20 . Depois calcula 6×2 , de modo que a soma dos produtos parciais seja igual ao número pretendido. Os registos escritos deste aluno evidenciam ainda que, para além de usar o modelo retangular como suporte para calcular, reconhece o problema como sendo de divisão. Gustavo é dos poucos alunos que, nesta altura, se apoia no modelo retangular para calcular.

O contexto do segundo problema da tarefa 25 complexifica-se, uma vez que se coloca a questão em termos do número de caixas necessário e não do número de embalagens (cada caixa contém dez embalagens de seis garrafas). De facto, 18 alunos, num total de 23, não conseguem resolver o problema ou fazem-no incorretamente. Alguns alunos efetuam várias tentativas de resolução, que deixam incompletas ou que estão incorretas, outros não realizam quaisquer registos e apenas cinco conseguem resolver o problema.

Duarte é um dos poucos alunos que resolve corretamente este problema, embora use registos pouco formalizados.

Figura 10: Resolução de Duarte da sub tarefa 2 – tarefa 25

Os registos de Duarte evidenciam que pensa em termos de grupos de 60 e que, no caso do número de garrafas da terceira caixa, dá a resposta em termos de embalagens “São ‘precisas’ 2 caixas e 2 embalagens”.

Além de Duarte, todos os alunos que resolvem corretamente este segundo problema raciocinam sempre considerando o número total de garrafas (132) e relacionam-no com o

número de garrafas por caixa (60). Não há, pois, alunos que pensam a partir do número de embalagens (22) que associam ao número de embalagens por caixa (10).

Os procedimentos usados pelos alunos na tarefa 26 da sequência 9

A análise das produções escritas dos alunos permite perceber que todos identificam a situação como sendo de divisão, pois registam a expressão correspondente e associam-na à multiplicação. Todos utilizam procedimentos de tipo multiplicativo e, com exceção de dois pares, todos se apoiam no modelo retangular. Há ainda um par de alunas, Eva e Mariana, que se apoia no modelo retangular apenas para a primeira parte da tarefa e, a seguir, opta por multiplicar sucessivamente. Há, também, um par de alunos que faz uma primeira tentativa de usar um procedimento aditivo, que abandona, e que substitui por outro de tipo multiplicativo.

Ana Rita e Miguel são um dos pares de alunos que não recorre ao uso do modelo retangular, optando por realizar produtos sucessivos.

The image shows two handwritten pages of mathematical work. The left page is by Guilherme and the right page is by Francisco. Both pages show multiplication tables for 8 and 7, respectively, starting from 10 and increasing by 1 up to 32. Guilherme's work is titled 'Guilherme' and shows a table for 8. Francisco's work is titled 'Francisco' and shows a table for 7. Both tables are organized in columns and rows, with the multiplier on the left and the product on the right.

Multiplier	Product
10	80
11	88
12	96
13	104
14	112
15	120
16	128
17	136
18	144
19	152
20	160
21	168
22	176
23	184
24	192
25	200
26	208
27	216
28	224
29	232
30	240
31	248
32	256

At the top of Guilherme's page, it says '256 : 8 = 32'.

Multiplier	Product
10	70
11	77
12	84
13	91
14	98
15	105
16	112
17	119
18	126
19	133
20	140
21	147
22	154
23	161
24	168
25	175
26	182
27	189
28	196
29	203
30	210
31	217
32	224

At the top of Francisco's page, it says '224 : 7 = 32'.

Figura 11: Excerto da resolução de Ana Rita e Miguel relativo à tarefa 26

O excerto da sua resolução mostra que, nas duas situações, os alunos calculam exaustivamente todos os produtos desde 10×8 e 10×7 , até encontrarem um cujo resultado seja igual a 256 e a 224, respetivamente. Nos seus registos iniciais, na folha de tarefa, nota-se que tentam usar o modelo retangular, que abandonam. Na discussão final, Ana Rita e Miguel são desafiados a explicar como pensaram.

Ana Rita – Nós vimos que tínhamos de fazer 256 a dividir por oito e 224 a dividir por sete. Como ainda não sabíamos o resultado, fizemos por multiplicações.

Professora – Os outros grupos também pensaram assim mas fizeram de maneira diferente. Ora, continuem a explicar.

Ana Rita – Nós também tentámos fazer com o retângulo mas não conseguimos perceber como se faz.

Professora – Mas expliquem lá a vossa maneira.

Ana Rita – Nós fomos fazendo a tabuada toda até ao 32.

Guilherme – Mas como é que sabiam que parava aí? Quantas vezes fizeram a tabuada?

Ana Rita – Sabíamos porque 32×8 é 256, o número das miniaturas.

Professora – É fácil fazer desta maneira?

Ana Rita – Mais ou menos.

Professora – E porquê mais ou menos?

Ana Rita – Por causa de demorar algum tempo e quem não sabe a tabuada pode enganar-se.

Professora – Mesmo quem sabe também se pode enganar, pois são muitos cálculos.

Ana Rita – A nós aconteceu-nos isso.

Professora – E como podiam fazer de maneira mais rápida e sem se enganarem?

Ana Rita – Passar logo de 10 vezes para 20 e depois para 30 vezes.

Na sua explicação, Ana Rita fundamenta o seu raciocínio, evidenciando que reconhece o problema como sendo de divisão e que o pode resolver usando a multiplicação. Um outro aluno, Guilherme, coloca-lhe uma questão associada ao “saber quando parar” à qual responde adequadamente, dando evidência da sua compreensão sobre o procedimento usado. Quando interpelada por Isabel, consegue identificar os riscos do seu uso e parece avançar para um procedimento mais eficaz, recorrendo a fatores múltiplos de dez.

De entre os procedimentos que se apoiam no modelo retangular há algumas diferenças a destacar. Enzo e Guilherme são dois dos alunos que reconhecem a divisão e utilizam o modelo retangular em ambos os cálculos.

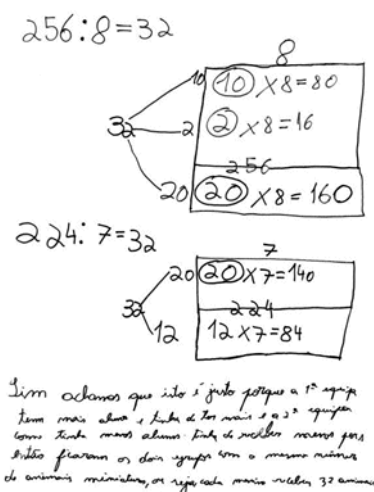


Figura 12: Resolução de Enzo e Guilherme da tarefa 26

Para calcular $256 \div 8$, recorrem a três produtos parciais, os dois iniciais correspondentes a um total menor que a centena. No cálculo relativo ao quociente de $224 \div 7$, progredem mais rapidamente, utilizando logo o fator 20 e depois o fator 12.

Também Cristóvão e Francisco, tal como os colegas, se apoiam no modelo retangular mas recorrem a produtos parciais associados à decomposição decimal de 32, registando os cálculos 30×8 e 2×8 , e 30×7 e 2×7 , respetivamente.

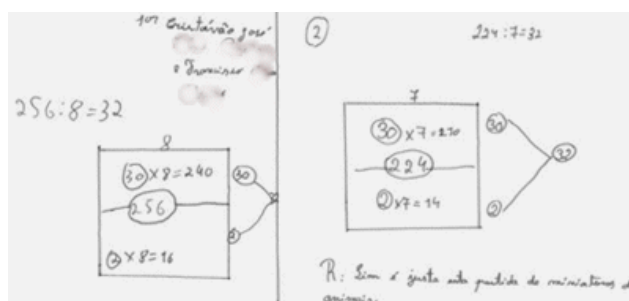


Figura 13: Resolução de Cristóvão e Francisco da tarefa 26

Na discussão coletiva, estes alunos clarificam como pensaram para encontrar o fator 30. Explicitam como usaram os múltiplos de dez para calcular rapidamente, destacando, ao mesmo tempo, o recurso a dobros de produtos já calculados (uma vez que pensam primeiro em 20×8 e depois em 40×8 , que já excede). Evidenciam, também, a sua percepção sobre a grandeza dos números que obtêm, ao compará-los com o número 256.

Diogo e Maria Rita são o único par que não compreende integralmente o problema. Como não percebem a pergunta final, resolvem o problema como se fosse preciso encontrar uma situação justa para todas as crianças e não comparar as duas situações apresentadas. Assim, pensam numa situação próxima da realidade – juntar todas as miniaturas num único saco e reparti-las por todas as crianças, que traduzem matematicamente por $480 \div 15$.

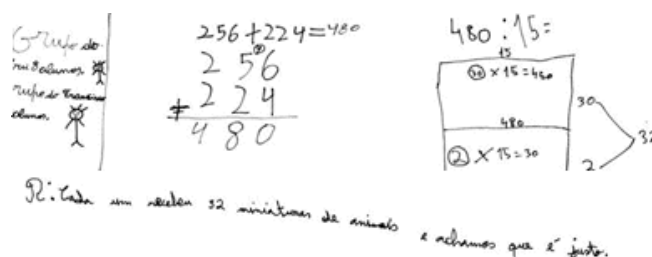


Figura 14: Excerto da resolução de Diogo e Maria Rita relativa à tarefa 26

Apesar de não corresponderem ao problema proposto, os registos efetuados pelos alunos mostram que realizam o cálculo associado a $480 \div 15$ com bastante facilidade, apesar da grandeza dos números envolvidos, apoiando-se no modelo retangular. Quando explicam o seu raciocínio, os alunos referem que pensaram primeiro em 10×15 mas ainda estava “longe” de 480, depois experimentaram 20×15 e, finalmente, 30×15 . Como já estava “perto”, é esse o produto que registam, identificando depois 2×15 , de modo a perfazer 480.

A resolução destes alunos é apresentada e discutida com toda a turma. A professora Isabel promove a discussão no sentido de esclarecer o contexto do problema, de modo que Diogo e Maria Rita percebam a diferença entre a sua interpretação e a dos colegas. No debate há alunos que se admiram como é que os colegas obtêm também 32 miniaturas para cada criança, efetuando uma divisão diferente. Isabel intervém, explicando que isto só tinha acontecido porque o quociente de cada uma das divisões é igual e dando um exemplo em que tal não acontece.

Os procedimentos usados pelos alunos na tarefa 28 da sequência 9

Nas cadeias numéricas que constituem a tarefa 28, propostas nas aulas seguintes, os alunos identificam com bastante facilidade as relações que podem ser estabelecidas de uns cálculos para outros. Apesar da ordem de grandeza de alguns dos números envolvidos, conseguem justificar os seus raciocínios baseando-se, intuitivamente, nas propriedades da multiplicação. Há, ainda, alunos que fundamentam o seu modo de pensar explicitando relações associadas à divisão, evidenciando segurança nos termos que utilizam e conhecimento sobre esta operação. Por exemplo, o quociente obtido a partir de $260 \div 13$, depois de ter sido calculado $130 \div 13$, é justificado por Duarte da seguinte maneira:

Duarte – 260 a dividir por 13 é 20. Porque 260 é o dobro de 130. E 130 a dividir por 13 é 10. Por isso 260 a dividir por 13 é igual ao dobro de 10, que é 20.

Apesar de a relação identificada poder ser sugerida pelas próprias características do cálculo em cadeia, é de realçar o nível de correção da linguagem usada por este aluno na sua explicitação. Esta parece evidenciar algum domínio das propriedades da divisão associadas às respetivas propriedades da multiplicação.

Em suma, na resolução de problemas de divisão desta sequência, os alunos parecem progredir no uso de procedimentos multiplicativos, parecendo reconhecer a relação inversa entre as operações divisão e multiplicação. Contudo, essa progressão não se efetua do mesmo modo nem ao mesmo tempo, para todos. Alguns persistem, ainda, no uso de procedimentos baseados em produtos sucessivos, enquanto outros tiram partido da utilização de fatores múltiplos de dez, de modo a prosseguir mais rapidamente nos cálculos. A introdução do modelo retangular como suporte ao cálculo parece ter facilitado os cálculos associados aos problemas propostos. Ainda assim, há a registar dificuldades na resolução da sub tarefa 2 – tarefa 25 associadas ao contexto proposto – uma situação de divisão não exata e na qual é preciso pensar em grupos de grupos.

Considerações finais

A análise dos procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de divisão com números naturais permitiu compreender o tipo de procedimentos utilizados e evidenciar alguns aspetos associados à sua evolução.

Um primeiro aspeto diz respeito à diversidade de procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas. Esta diversidade parece ter sido encorajada não apenas pelas características das tarefas propostas, os seus contextos e números mas, também, pelo ambiente de sala de aula construído, em que os alunos eram estimulados a apresentar as suas resoluções e a discuti-las com os colegas. Tal como referem Torbeyns, de Smedt, Ghesquière e Verschaffel (2009), os alunos tendem, espontaneamente, a inventar e a utilizar um leque de procedimentos variados quando integrados num ambiente sociomatemático que os encoraja a usar diversos procedimentos. Ainda assim, não existem evidências suficientes que mostrem diferenças entre os procedimentos usados pelos alunos em contextos de divisão por medida e por partilha, tal como referem autores como Ambrose et al. (2003) e Fosnot e Dolk (2001).

Um segundo aspeto relaciona-se com a evolução dos procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas. Esta não se processa do mesmo modo para todos os alunos e, enquanto alguns progridem mais rapidamente para procedimentos baseados na multiplicação, outros permanecem mais tempo no uso de procedimentos aditivos e subtrativos e outros, ainda, manifestam preferência clara por alguns procedimentos.

A permanência de alguns alunos no uso de procedimentos pouco potentes, sobretudo nos primeiros problemas, parece estar relacionada com o considerarem as situações propostas com um maior grau de complexidade. Além disso, os procedimentos usados pelos alunos vão-se alterando de acordo com o seu conhecimento sobre os números, as operações aritméticas e as suas propriedades (Ambrose et al., 2006). Ora o conhecimento dos alunos associado à operação divisão ia sendo construído à medida que os alunos resolviam as tarefas propostas e não se desenvolvia, naturalmente, do mesmo modo para todos.

Houve, ainda, alunos que manifestaram uma clara preferência por alguns procedimentos, tal como Ana Rita e Miguel (Figuras 4 e 11) que recorreram frequentemente a multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência, mesmo quando os colegas já usavam procedimentos mais potentes, menos morosos e menos suscetíveis a enganos. Uma das razões para que isto aconteça está relacionada com a familiaridade e a confiança no seu uso. De facto, é no confronto entre o uso de procedimentos familiares dos alunos e a constatação da sua dificuldade ou inadequação num certo contexto que surge o desequilíbrio que provoca o desenvolvimento de um novo procedimento (Fosnot & Dolk, 2001). Ora, no caso de Ana Rita e Miguel, em certas tarefas, este desequilíbrio não favoreceu o recurso a novos procedimentos, ao contrário do que se verificou com os outros colegas da turma.

Ainda assim, na resolução dos problemas de divisão, progressivamente, os alunos da turma optam cada vez mais por procedimentos baseados nas propriedades da multiplicação, relacionando-a com a divisão. De facto, a perceção da relação inversa entre a multiplicação e a divisão tem implicações importantes no cálculo eficiente e flexível (Greer, 2012). Para este aspeto parecem ter contribuído os contextos dos problemas, os números envolvidos e o uso do modelo retangular. No entanto, os contextos de divisão em que era preciso pensar em termos de grupos revelaram-se difíceis para os alunos.

Os procedimentos multiplicativos que surgem a partir da exploração dos contextos e números apropriados reforçam a ideia da sua importância, no aprofundamento dos aspetos relacionados com a multiplicação e a divisão. Essa importância é justificada na medida em que os contextos e os modelos associados revelam aspetos fundamentais das estruturas multiplicativas e permitem uma primeira abordagem às propriedades destas operações, facilitando o cálculo (Fosnot & Dolk, 2001; Treffers & Buys, 2008).

A introdução do modelo retangular, primeiro associado à multiplicação e depois à divisão, parece ser um contributo para que os alunos usem procedimentos multiplicativos mais potentes, relacionados com o uso eficaz das propriedades da multiplicação. Inicialmente, há alunos que têm algumas dificuldades no seu uso mas esse aspeto melhora progressivamente, uma vez que, nos últimos problemas propostos, a maioria opta pela sua utilização.

A relação entre o modelo retangular e o uso de procedimentos de multiplicação, de decomposição de um dos fatores, é mencionado por autores como Barmby et al. (2009) e Battista et al., (1998). Como contributo deste modelo é identificada a visualização que é possível fazer das diferentes partições dos cálculos, tendo subjacentes a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a propriedade comutativa da multiplicação.

A cultura de sala de aula que vai sendo construída, assente numa organização que inclui momentos de trabalho individual, a pares ou de discussão com toda a turma, em que os alunos aprendem a explicitar e justificar os seus raciocínios, parece contribuir também para a evolução dos seus procedimentos de cálculo. O modo como são capazes de interpretar o

trabalho dos colegas e de os interpelar sobre ele, pedindo justificações ou esclarecendo dúvidas, denota uma progressão na sua compreensão sobre a divisão e a multiplicação.

Finalmente, a opção, sugerida por alguns autores (Barmby et al., 2009; Fosnot & Dolk, 2001), de relacionar a divisão com a multiplicação parece ter-se revelado adequada, uma vez que permitiu aos alunos potenciar o seu conhecimento sobre a multiplicação na resolução das tarefas de divisão. Em particular, Downton (2008) refere que, na sala de aula, antes do trabalho formal com a divisão, deve ser uma prioridade o enfatizar a relação entre as duas operações e desenvolver a linguagem associada.

Referências

- ACARA. (2010). *The Australian Curriculum. Mathematics*. Obtido em 31 de julho de 2011, de ACARA Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority: <http://www.australiancurriculum.edu.au/Mathematics/Curriculum/F-10>.
- Ambrose, R., Baek, J. M. & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Anghileri, J. (2001). Development of division strategies for year 5 pupils in ten English schools. *British Educational Research Journal*, 27(1), 85-103.
- Baek, J. M. (2006). Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication. *Teaching Children Mathematics*, 12(5), 242-247.
- Barmby, P., Bilsborough, L., Harries, T. & Higgins, S. (2009). *Primary mathematics. Teaching for understanding*. Berkshire, England: Open University Press.
- Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K. & Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503-532.
- Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer, & E. van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 127-162). Utrecht, The Netherlands.
- Cobb, P., Zhao, Q. & Dean, C. (2009). Conducting design experiments to support teachers' learning: a reflection from the field. *Journal of the Learning Sciences*, 18(2), 165-199.
- DfEE. (1999). *Mathematics - Key Stages 1&2 - National Curriculum*. Obtido em 31 de Julho de 2011, de National Curriculum website: <http://curriculum.qcda.gov.uk/key-stages-1-and-2/subjects/mathematics/keystage2/index.aspx>
- Downton, A. (2008). Links between children's understanding of multiplication and solution strategies for division. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Ed.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 171-178). MERGA.
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Foxman, D. & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in UK. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1-2), 41-69.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about this? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Gravemeijer, K., Bowers, J. & Stephan, M. (2003). A hypothetical learning trajectory on measurement and flexible arithmetic. In M. Stephan, J. Bowers, P. Cobb & K. Gravemeijer, *Supporting students' development of measuring conceptions: JRME Monograph 12* (pp. 51-66). Reston, VA: NCTM.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 429-438.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (MERGA-30). 1*, pp. 345-352. Hobart: MERGA.

Heirdsfield, A., Cooper, T. J., Mulligan, J. & Irons, C. J. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference*, (pp. 89-96). Haifa, Israel.

Kelly, A. & Lesh, R. (2000). Part III: Teaching experiments. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 191-196). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Um estudo com alunos do 1.º ciclo*. (Tese de doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. In <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/5893>.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Obtido em 6 de outubro de 2009, de <http://www.dgidec.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>

Natale, C. & Fosnot, C. T. (2007). *The teachers' lounge. Place value and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

Torbeys, J., de Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics*, 71(1), 1-17.

Treffers, A. & Buys, K. (2008). Grade 2 (and 3) – Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 61-88). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.). (2008). *Children learn mathematics*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Verschaffel, L., Greer, B. & Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 51-82). The Netherlands: Sense Publishers.